O CERCETARE ORIGINALĂ ÎN TOPOLOGIA MODERNĂ. REFLECŢII ASUPRA CORELAŢIILOR DINTRE REAL ŞI ABSTRACT

Academician **Mitrofan CIOBANU**, Universitatea de Stat din Tiraspol
Academician **Radu MIRON**, Universitatea „Al. Ioan Cuza" din Iaşi

Multe trec pe dinainte,/ În auz ne sună multe,/
Cine ține toate minte / Și ar sta să le asculte?...//
Tu așază-te deoparte, / Regăsindu-te pe tine, /
Când cu zgomote deșarte / Vreme trece, vreme vine...

Mihai Eminescu

AN ORIGINAL RESEARCH IN MODERN TOPOLOGY. REFLECTIONS ON CORRELATIONS BETWEEN REAL AND ABSTRACT

Summary. In the present article is enterprise an analysis of the monograph *Algebraic topology of multi-ary relations* by Sergiu Cataranciuc. This fundamental research was inspired by solving a number of actual problems with applicative-theoretical aspects. It mentions some particularities of the process of the transition from the concrete to the general, from the real to the abstract. Some open problems are formulated.

Keywords: homology, cohomology, graph, hipergraph, matroid, median problem, complex of multi-ary relations, abstract cubical complex.

Rezumat. În prezentul articol se întreprinde o analiza a monografiei *Topologia algebrică a relațiilor multi-are*, semnată de Sergiu Cataranciuc. Această cercetare fundamentală a fost inspirată de soluționarea unui șir de probleme importante cu aspect aplicativ-teoretic. Se menționează unele particularități ale procesului de trecere de la concret la general, de la real la abstract. Sunt formulate și un șir de probleme nerezolvate.

Cuvinte-cheie: omologie, coomologie, grafuri, hipergrafuri, matroid, problema medianei, complex de relații multi-are, complex abstract cubic.

INTRODUCERE

Recent, la Editura Universităţii de Stat a Moldovei a văzut lumina tiparului monografia *Topologia algebrică a relațiilor multi-are* [4], semnată de doctorul conferenţiar universitar Sergiu Cataranciuc, redactor științific – academician Petru Soltan.

Prezentul articol are următoarele scopuri:

- Să realizeze o analiză a monografiei *Topologia algebrică a relațiilor multi-are.*
- Să analizeze câteva probleme clasice care au condus la crearea de noi teorii matematice.
- Să sugereze extinderi inedite în teoria omologiilor și coomologiilor relațiilor multi-are.

Monografia în cauză are un caracter teoretico-aplicativ pronunțat. Mai mult, după cum menționează chiar autorul în introducere, cercetările teoretice ce țin de studierea structurilor matematice noi, numite *complexe de relații multi-are*, au pornit de la examinarea unor probleme practice, asupra cărora, prin anii '60-'70 ai secolului trecut, au fost întreprinse mai multe încercări de a le soluționa de către discipolii academicianului P. Soltan.

Printre acestea se află problema medianei, problema divizării în părţi convexe a unei structuri discrete, determinarea strategiilor optime în jocuri combinatoriale etc., pentru care în acea vreme au fost elaborate metode de soluţionare doar în câteva cazuri specifice, particulare. Rezultatele obţinute în legătură cu examinarea complexului de relaţii multi-are oferă noi posibilităţi de a rezolva unele probleme care sunt abordate în ultimul capitol al lucrării.

Monografia reprezintă o investigare profundă și originală a relațiilor multi-are cu rezultate fundamentale în domeniile topologiei algebrice și a teoriei grafurilor. În consecință, rezultatele teoretice obținute oferă posibilități reale pentru elaborarea unor metode eficiente de soluționare a problemelor cu caracter aplicativ. Prin urmare, studiul nominalizat constituie o îmbinare surprinzătoare dintre particular și general, dintre real și abstract.

Este evident că viața și practica de toate zilele ne oferă probleme concrete și particulare. Printre acestea se pot evidenția anumite clase de probleme care pot fi soluționate în același mod. Mai mult, adesea, procesele reale studiate pot fi descrise cu ajutorul anumitor structuri și relații virtuale, intuitive, care oferă metode de soluționare neașteptate, uimitoare.

Trecerea de la real la abstract este un moment important al procesului de separare a ceea ce în realitate nu este separat sau separabil, prin care se desprind și se rețin unele dintre caracteristicile și relațiile esențiale ale obiectului cercetării. Abstractul este o transformare a realității obiective, un produs nou care reflectă anumite proprietăți ale realității. Acesta aparține spațiului conceptual, și nu celui real. Se poate spune că fiecare cuvânt din vocabularul unei limbi vorbite este un produs abstract. Orice cuvânt-sens este o abstracție, o acțiune informațională. Numărul, funcția, dreapta, planul, cercul, sfera sunt noțiuni abstracte cu realizări concrete. Însă nu orice abstracție este viabilă. Viabilitatea abstractului depinde, în primul rând, de compatibilitatea lui cu realitatea. Principiul realizării exprimă coerența și unitatea dintre real și abstract. Max Tegmark afirma: *Toate structurile existente matematic, de asemenea, există și fizic* [24]. Rezultatul abstractizării depinde de mijloacele folosite de cercetător și, nu în ultimul rând, de abilitățile și „gusturile" acestuia. Același proces poate fi modelat abstract în mai multe moduri, depinzând de scopul cercetării. Uneori apare necesitatea de a crea direcții de cercetare și fundamentare a unor noi domenii matematice.

Trecerea de la particular la general sau de la real la abstract nu e simplă și deseori conține capcane ascunse. Dificultățile pot să apară din următoarele cauze:

- matematica studiază noțiuni și relații între ele, bine determinate din punct de vedere logic, iar limbile vorbite oferă multe noțiuni cu un volum de informație vag, evaziv;
- nu tot ce pare a fi clar și precis conduce la concluzii corecte;
- unele rezultate matematice au un conținut opus așteptărilor și intuiției, iar în anumite cazuri, pot genera crize profunde.

De exemplu, Hippasos din Metaponte (sec. V î. Hr.), filozof al Greciei Antice din școala pitagoriană, a demonstrat că diagonala pătratului cu latura 1, care este egală cu rădăcina pătrată a lui 2, notată $\sqrt{2}$, nu este număr rațional. Filozofia greacă a fost puternic influențată de studiul geometriei. Din punct de vedere geometric, orice rezultat al măsurărilor este număr, iar din punct de vedere aritmetic, orice număr este fracțional. Acest lucru a cauzat o reevaluare semnificativă a filozofiei matematicii.

Potrivit legendei (legenda nu are confirmare), colegii pitagorieni au fost atât de traumatizați de această descoperire, încât l-au ucis (alții afirmă că l-au fugărit din școala pitagoriană) pe Hippasos pentru a opri răspândirea ideii lui eretice. Unii susțin că pedeapsa i-a fost acordată deoarece a divulgat secretul construcției dodecaedrului regulat înscris într-o sferă. Numere iraționale apar și în cazul utilizării *Proporției de aur* pentru construcția pentagonului regulat. Ca rezultat, acest uimitor și controversat fapt s-a soldat cu divizarea matematicii în trei domenii mari: geometrie, algebră și teoria numerelor. Metoda coordonatelor, concepută de Thales (640 î. Hr. – 550 î. Hr.), a rămas în folosința geografiei, iar pentru matematică a fost trecută la umbra uitării până la René Descartes (1596 – 1650).

Teoria mulțimilor ca domeniu al matematicii a fost inițiată în a doua jumătate a secolului al XIX-lea de către matematicienii germani Georg Cantor și Richard Dedekind. Încă filozofii Greciei Antice operau cu noțiunile de:

- *infinit actual* – o infinitate de obiecte concepute ca existând simultan;
- *infinit potențial* – o mulțime sau o mărime finită, dar care se poate mări oricât de mult.

Din cauza faimoaselor *aporii* ale lui Zenon se considera că infinitul actual nu este accesibil intuiției și doar infinitul potențial poate fi utilizat în gândirea matematică. În lucrarea *Teoria rațională a infinității*, Cantor a depășit această contradicție, încercând să „numere infinitul" cu ajutorul funcțiilor bijective[1]. El a stabilit că există o „mare infinitate" de tipuri ale infinitului. Conform definiției lui Cantor, mulțimea poate fi descrisă în următorul mod: *o totalitate de obiecte bine determinate și distincte, numite și elemente ale mulțimii*. Cantor considera inițial că o proprietate P generează mulțimea $\{x{:}P\}$ tuturor obiectelor (elementelor) x cu proprietatea P. S-a arătat mai târziu că aceste concepte, definite în modul indicat, conduc la apariția unor contradicții. Antinomia (paradoxul) lui Bertrand Russel (1902) demonstrează că totalitatea B a tuturor mulțimilor care nu se conțin ca element nu este o mulțime. Din această cauză se introduce noțiunea de *clasă* ca *o totalitate de obiecte bine determinate și distincte, numite și elemente ale clasei*. Deci, totalitatea B din paradoxul lui Russel este o clasă și nu este mulțime. Totodată, orice mulțime este și clasă. Antinomia lui Richard (1905) (simplificată ulterior de Berry) afirmă că nu există „mulțimea C a tuturor numerelor naturale care pot fi definite cu mai puțin de 17 cuvinte". În caz contrar, „cel mai mic număr natural care nu poate fi definit cu mai puțin de 17 cuvinte" va fi un element al mul-

[1] Conceptele de mulțime și bijecție au fost examinate mai devreme de Bernhard Bolzano (1781 – 1848). Cea mai mare parte a lucrărilor sale au rămas în manuscrise și au fost tipărite abia în anul 1930.

ţimii *C*. Paradoxul lui Richard ţine de ambiguitatea limbajului obişnuit: *Ce înseamnă exact a defini un număr natural?* Există şi alte antinomii.

Antinomiile teoriei mulţimilor au „tulburat" universul ştiinţei şi au dus la o noua criză: *cât de adevărat este ceea ce s-a demonstrat că este adevărat*? Pentru a elimina aceste contradicţii, au fost create teorii axiomatice ale mulţimilor: teoria lui Zermelo şi Fraenkel (ZF); teoria lui von Neumann, Bernays şi Gödel (NBG) şi altele [17]. Pentru a evita antinomiile, B. Russell a introdus *principiul cercului vicios*: niciun membru al unei colecţii nu poate fi definit prin colecţia la constituirea căreia el a servit ca membru [23]. În teoria naivă (neaxiomatică) a mulţimilor sunt descrise construcţiile şi operaţiile admisibile cu mulţimile. Evoluţiile surprinzătoare şi controversate ale logicii formale şi teoriei mulţimilor de la începutul secolului XX au contribuit la crearea fundamentelor matematicii. Teoria mulţimilor stă la baza tuturor teoriilor matematicii contemporane.

Istoria unor probleme clasice care au inspirat crearea de noi teorii matematice

Din punct de vedere istoric, cercetările matematice au derivat din necesitatea de a face anumite calcule, de a efectua diverse măsurări, de a studia anumite procese, de a predetermina evenimente astronomice, urmărind anumite scopuri practice. Aceste tendinţe s-au păstrat până în zilele de astăzi. Studiul relaţiilor cantitative, al modelelor de structură, al formelor spaţiale, determină obiectul matematicii ca ştiinţă. În sens modern, matematica este ştiinţa despre structuri abstracte, relaţii, ordonări, măsurări şi descrieri ale formelor obiectelor. Obiectele matematice sunt create prin idealizarea proprietăţilor obiectelor reale şi scrise într-o limbă formală.

Sunt cunoscute situaţii reale care au inspirat teorii noi datorită apariţiei unor idei „de moment". Drept exemplu poate servi istoria cu momentul „Evrica" în cazul lui Arhimede, sau cea cu „mărul lui Newton". Însă, desigur, există şi situaţii care generează noi teorii doar după o analiză profundă. În acest context putem menţiona problema celor şapte poduri din Königsberg, de la care a pornit dezvoltarea topologiei ca ştiinţă şi care, în anumit sens, a inspirat unele idei ce au contribuit la fundamentarea teoriei relaţiilor multi-are.

Problema podurilor Königsberg – celebra problemă de traversare, ale cărei origini datează cu mijlocul secolului al XVIII-lea. În acele vremuri, în orăşelul Königsberg din Prusia Orientală (astăzi Kaliningrad, Rusia), locuitorii găsiseră o distracţie destul de originală. Oraşul era străbătut de râul Pregel, care pe teritoriul oraşului se bifurca în două braţe, formând două insule. Insulele erau legate de maluri cu şapte poduri (Figura 1). Locuitorii se străduiau să găsească un traseu care le-ar permite să parcurgă toate cele 7 poduri o singură dată. Nereuşind acest lucru, au apelat la matematicieni pentru găsirea soluţiei. Aşa a apărut *problema celor şapte poduri din Königsberg.*

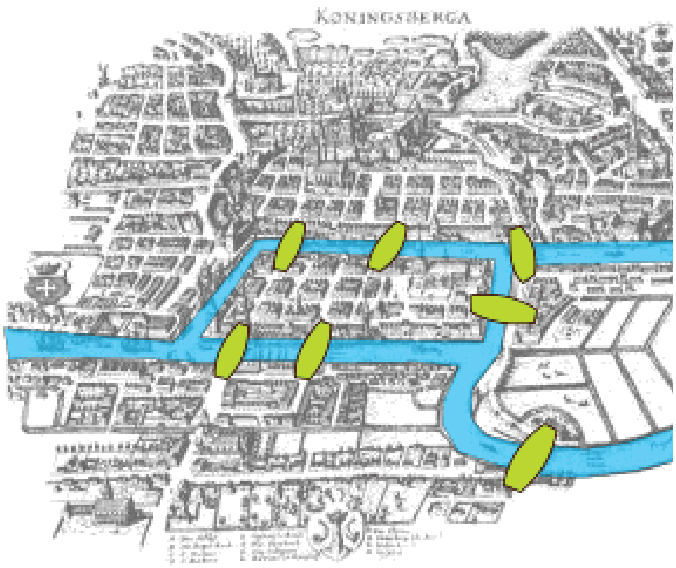


Figura 1. Harta din secolul XVII a oraşului Königsberg cu râul şi podurile evidenţiate

Oraşul Königsberg, fondat în 1255 de germani, a fost timp îndelungat capitala Prusiei Orientale şi cel mai important centru economic şi cultural al estului german până în 1945. În acest oraş s-au născut şi au activat mulţi savanţi germani: Johannes Müller, Immanuel Kant, David Hilbert, Hermann Minkowski, Franz Ernst Neumann, Heinrich Eduard Heine, Friedrich Wilhelm Bessel, Iohannes Kepler, Paul Thomas Mann, Gustav Robert Kirchhoff şi alţii. **Leonhard Euler** (1707–1783), considerat cel mai mare matematician al sec. al XVIII-lea şi unul dintre remarcabilii savanţi polivalenţi ai omenirii, a aflat despre problema amuzantă a locuitorilor oraşului.

Euler a cercetat în mod ştiinţific problema şi a făcut o comunicare pe această temă la Academia din St. Petersburg în anul 1735, cu titlul: *Soluţia unei probleme ce aparţine geometriei de poziţie,* care a fost publicată în 1736. El a arătat că problema, în forma în care a fost prezentată, nu are soluţie. Aceasta nu depindea de lungimea şi forma podurilor sau de distanţa dintre ele, ci numai de poziţia lor unul faţă de altul. Soluţia euleriană a problemei date a dus la apariţia şi dezvoltarea topologiei şi a teoriei grafurilor.

Graful este o pereche ordonată de mulţimi $G=(V, E)$, unde V este o mulţime nevidă şi finită de elemente numite vârfuri, iar E este o mulţime de perechi de vârfuri, numite muchii ale grafului. (Perechile de vârfuri din E pot fi ordonate sau neordonate şi, în funcţie de aceasta, grafurile se numesc neorientate sau orientate.) Perechea formată din vârfurile x şi y se notează (x, y). În acest caz se spune că x şi y sunt vârfuri adiacente şi fiecare dintre acestea se consideră incident muchiei (x, y). Numărul de muchii incidente vârfului x se numeşte grad al acestui vârf şi se notează prin $d(x)$. Într-un graf neorientat, o secvenţă de vârfuri $(v_1, v_2, \dots, v_k)$, unde v_i este adiacent cu v_{i+1} pentru orice $1 \leq i < k$, se numeşte *lanţ*, iar lanţul închis se numeşte ciclu. Lanţul/ciclul care conţine fiecare muchie a grafului exact o singură dată se numeşte lanţ/ciclu eulerian. Lanţul/ciclul care conţine fiecare vârf al grafului exact o singură dată se numeşte lanţ/ciclu hamiltonian.

Euler a stabilit următoarele teoreme:

E1. *Graful neorientat conex conţine un lanţ eulerian dacă şi numai dacă exact două vârfuri ale acestuia sunt de grad impar.*

E2. *Graful neorientat conex conţine un ciclu eulerian dacă şi numai dacă toate vârfurile sunt de grad par.*

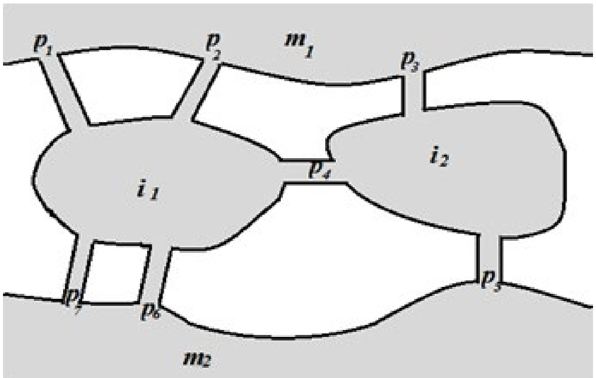


Figura 2. Schema formală a oraşului Königsberg

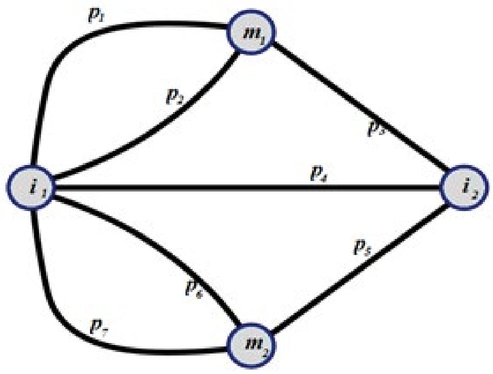


Figura 3. Graful asociat problemei podurilor Königsberg

Problema celor şapte poduri din Königsberg poate fi rezolvată acum în modul următor. Fie m_1 şi m_2 malurile râului, iar i_1 şi i_2 – insulele. Examinăm două mulţimi: $V=\{m_1,m_2,i_1,i_2\}$, şi $E=\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$ formată din toate podurile, conform schemei din figura 2. Obţinem graful neorientat $G=(V,E)$, în care toate vârfurile sunt de grad impar. Existenţa unui ciclu eulerian ar însemna existenţa unei soluţii a problemei. Conform teoremelor E1 şi E2 în acest graf nu există nici lanţuri, nici cicluri euliriene (figura 3).

De-a lungul a zeci, ba chiar sute de ani, s-a observat că grafurile servesc drept model eficient la soluţionarea mai multor probleme de optimizare, caracteristice diferilor domenii de activitate. Acestea au devenit deja probleme clasice ale matematicii, fiind redescoperite în permanenţă în procesul examinării unor chestiuni de ordin practic. În acest sens, una dintre cele mai cunoscute probleme de optimizare combinatorială este cea a **comis-voiajorului**: se consideră o mulţime din n oraşe şi un comis-voiajor care trebuie să le viziteze pe toate, trecând o singură dată prin fiecare oraş şi să se întoarcă în oraşul de pornire astfel încât costul total al drumului să fie cât mai mic. Din punct de vedere formal, în varianta clasică, problema este echivalentă cu cea de a găsi un ciclu hamiltonian de cost minim într-un graf. Problema este importantă atât din punct de vedere teoretic, cât şi din punct de vedere practic, întrucât o serie de probleme concrete pot fi formulate ca problema comis-voiajorului:

- identificarea rutei optime pentru mijloacele de transport;
- generarea traseelor urmate de dispozitivele de producere a circuitelor integrate;
- problema transferului;
- problema drumului de cost minim;
- problema fluxului maxim;
- problema fluxului maxim de cost minim.

Diverse aplicaţii ale teoriei grafurilor în chimie se pot regăsi în culegerea de articole [16]. În articolul lui D. M. Walba din această culegere se expune metoda sintezei benzii moleculare de forma benzii lui Möbius, primul exemplu de suprafaţă neorientată cu o singură parte. August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) a fost un matematician şi astronom german.

În lucrarea lui R. B. King, din aceeaşi culegere, se cercetează legăturile chimice în molecule de forma poliedrelor regulate. Există numai cinci tipuri de poliedre regulate: din triunghiuri sunt formate tetraedrul (cu patru fețe), octaedrul (cu opt fețe) și icosaedrul (cu 20 fețe); din pătrate este format cubul sau hexaedrul cu șase fețe; din pentagoane este format numai dodecaedrul cu 12 fețe. Compușii obținuți se numesc poliedroni. Compusul C_4H_4 este un tetraedron, compusul C_8H_8 este un cuban și compusul $C_{20}H_{20}$ este un dodecaedron. În alte articole se examinează clustere de molecule de forma unui complex poliedron, se cercetează compuși chimici cu diferiți invarianți ai grafurilor, topologii pe compuși de molecule etc.

Orice poliedru simplu P din spațiul euclidian n-diensional E^n, $n\geq 1$, are fețe care sunt poliedre simple cu dimensiunea n-1, iar acestea, la rândul său, vor avea fețe cu dimensiunea n-2 etc. În așa mod, pentru poliedrul P se determină fețele cu dimensiunea 0 care coincid cu vârfurile poliedrului, fețele cu dimensiunea 1 care coincid cu muchiile poliedrului și așa mai departe până la fețele cu dimensiunea n-1. Cele mai elementare poliedre simple sunt simplexele: punctul, segmentul, triunghiul, tetraedrul etc. Simplexul n-dimensional pentru $n\geq 1$ are $n+1$ fețe și n+1 vârfuri. S-a determinat că unele figuri spațiale F pot fi reprezentate ca o totalitate de poliedre simple $\gamma=\{F_1, F_2, ..., F_m\}$ cu proprietățile: dacă $P\in\gamma$ și H este o față a poliedrului P, atunci $H\in\gamma$; dacă $P,Q\in\gamma$, atunci P și Q sau nu se intersectează, sau au o față comună. În acest caz γ se va numi descompunere poliedrală a figurii F.

Admitem că γ este o descompunere poliedrală a figurii F. Notăm prin $k_i(F)$ numărul de poliedre de dimensiunea i din γ. Numărul

$$e(F) = k_0(F)-k_1(F)+k_2(F)+ ...+(-1)^i k_i(F)+... \qquad (e)$$

se numește caracteristica lui Euler-Poincaré a figurii F și acesta nu depinde de descompunerea poliedrală a figurii F. Formula și concluzia rămân aceleași, dacă poliedrele F_i se înlocuiesc cu poliedre curbilinii topologic regulate sau simple, adică topologic echivalente cu poliedre regulate sau simple. Acest fapt extinde posibilitățile de a aplica caracteristica lui Euler-Poincaré pentru o clasă mai largă de figuri, în particular, pentru suprafețe (de asemenea, de a aplica această teorie în diverse domenii).

Pentru suprafața unui poliedru F din spațiul euclidian 3-dimensional formula (e) are forma $e(F)=v-m+f$, unde v este numărul de vârfuri, m – numărul de muchii, iar f – numărul de fețe din F, și poartă numele de formula poliedrală a lui Descartes-Euler. Acest caz particular a fost stabilit de Euler în 1752, iar cazul general – de către Poincaré în 1893. Formula permite caracterizarea poliedrelor regulate, clasificarea unor compuși chimici, descrierea structurii moleculare a celulelor etc. Pentru un poliedru P regulat, simplu sau convex, vom avea:

$$e(P)=k_0(P)-k_1(P)+k_2(P)=v-l+f=2.$$

Descompunerile poliedrale pot fi formalizate în următorul mod. Se numește complex simplicial abstract, sau simplu – complex simplicial, o pereche ordonată de mulțimi $K=(V, F)$, unde V este o mulțime nevidă de elemente numite vârfurile complexului, iar F este o familie de submulțimi finite ale mulțimii V, numite simplexe, cu proprietățile: dacă $v\in V$, atunci $\{v\}\in F$; dacă $f\in F$ și g este submulțime nevidă a mulțimii f, atunci $g\in F$; dacă $f\in F$ conține k+1 elemente din V, atunci k se numește dimensiunea simplexului f. Pentru un complex simplicial finit K se determină caracteristica lui Euler-Poincaré $e(K)$ conform formulei (e). Mai mult ca atât, în mod tradițional se construiesc grupurile de omologii $H^m(K, G)$ cu coeficienți din grupul abelian G. Studiul sistematizat al grupurilor de omologii a fost inițiat de către distinsul savant francez Jules Henri Poincaré (1854 –1912) [10, 12, 19, 20], chiar dacă se recunoaște că Teoria Omologiilor începe de la formula lui Euler, sau caracteristica Euler a poliedrelor. Poincaré, de regulă, formula problemele matematice fiind inspirat de diverse probleme din fizică, astronomie, științe ale naturii, ceea ce deseori conduce la necesitatea elaborării unor metode sau chiar teorii noi. În anul 1857 Riemann a introdus noțiunea de varietate și unele caracteristici omologice, precum ar fi noțiunile de gen și n-conexiune. Apoi, în 1871 Betti [2] demonstrează independența „numerelor omologice" de modul în care a fost aleasă baza. În faimoasa sa lucrare *Analysis situs*, scrisă de Henri Poincaré (a se vedea [21]), au fost introduse pentru prima dată noțiunile de complex de lanțuri simpliciale și de omologie simplicială a varietății triangulabile. Rangurile $r_m(F)$ grupurilor de omologii $H^m(K,G)$ sunt numerele Betti. În lucrarea [21] Poincaré a determinat că pentru familia de simplexe F este adevărată egalitatea:

$$e(F) = r_0(F)-r_1(F)+r_2(F)+ ...+ (-1)^i r_i(F)+... \qquad (p)$$

Cu această formulă s-a inițiat „măsurarea algebrică a armoniei geometrice"[2]. Studiul claselor omologice ca grupuri abeliene a fost inițiat de către Emmy Noether, Leopold Vietoris și Walther Mayer în perioada anilor 1925 – 1928 (a se vedea lucrările [25, 5, 19]). Formalismul dezvoltat în lucrările lui S. Eilenberg, H. P. Cartan, N. Steenrod și alții [5, 11, 19, 20, 25] au per-

[2] O modificare a cuvintelor lui Salieri „a măsura armonia cu algebra", din tragedia lui A.S. Pușkin „Mozart și Salieri".

mis extinderea teoriei omologiilor pentru anumite structuri discrete. De exemplu, C.H. Dowker [9] încă la începutul anilor '50 ai secolului trecut a propus o metodă de construire a omologiilor relațiilor binare, care au fost mai târziu aplicate în studiul automatelor. Importante concepte și construcții cu diverse aplicații referitor la teoria omologiilor și coomologiilor simpliciale abstracte sunt propuse și examinate în lucrările lui R. Miron, Gh. Pitiș și I. Pop [19, 20].

În contextul celor spuse mai sus constatăm că monografia *Topologia algebrică a relațiilor multi-are* completează într-un mod constructiv teoria generală a omologiilor cu rezultate originale ce pornesc de la studierea unei structuri discrete noi. Studiul denotă o abordare profundă și originală:

- se propun metode noi de studiu ale unui șir finit de relații de orice arietate;
- sunt simple și neobișnuite axiomele complexului de relații multi-are;
- conceptul de complex de relații multi-are acoperă o serie de noțiuni clasice (grafuri, hipergrafuri, matroizi, complexe simpliciale etc.);
- sunt surprinzătoare conceptul de cuasisimplex și căile de utilizare a acestei noțiuni;
- spectrul de probleme practice care pot fi soluționate prin aplicarea metodelor teoriei complexelor de relații multi-are este foarte larg.

Se cunoaște că un spațiu topologic X poate fi aproximat cu complexe simpliciale. Fie w o astfel de familie de submulțimi ale spațiului X, încât fiecare punct $x \in X$ se conține într-un număr finit $ord(x,w) \geq 1$ de elemente din w și există o vecinătate a punctului x care se intersectează cu un număr finit de elemente din w. Astfel de familii se numesc acoperiri local finite ale spațiului X. Fie V=w, iar F – totalitatea submulțimilor din w cu intersecție nevidă. Atunci $K=(V, F)$ este un complex simplicial, care se consideră o aproximație a spațiului X. În totalitatea acoperirilor local finite din mulțimi deschise există o dirijare care permite să luăm limita grupurilor de omologii care, la rândul său, formează grupurile de omologii $H^m(X,G)$ ale spațiului X. Această metodă a fost propusă în 1929 de către matematicianul rus Pavel S. Alexandrov (07.05.1896 – 16.11.1982) și extinsă apoi de către mulți alți savanți [10, 12, 19, 20].

Vorbind despre aproximarea spațiului X cu complexe simpliciale nu putem trece cu vederea, desigur, cazul când complexele respective sunt de altă natură. În loc de simplexe, de exemplu, pot fi examinate cuburile abstracte. În acest caz se obțin grupuri de omologii cubice ale spațiului sau ale complexului cubic. Unele grupuri de omologii cubice coincid cu cele simpliciale. Astfel, obținem că grupurile de omologii cubice singulare coincid cu grupurile de omologii singulare simpliciale [12]. Grupurile de omologii și co-omologii descriu proprietățile multor procese cunoscute în fizică, chimie, biologie etc. De exemplu, există o analogie surprinzătoare între proprietățile șirului de grupuri omologice și legile lui Kirchhoff, formulate pentru circuitele electrice.

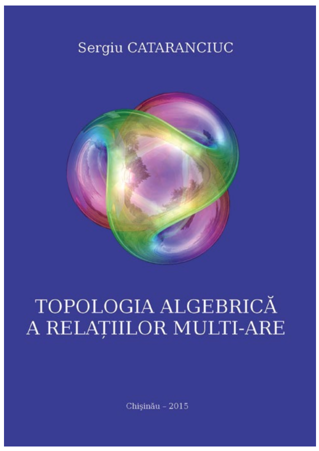
Apare întrebarea: Din ce cauză se cercetează complexele simpliciale sau cele cubice? Am observat că poliedrele regulate, numite și corpuri platonice, apar în mod natural, într-o formă sau alta. Tetraedrul, cubul și octaedrul se întâlnesc sub formă de cristale.

Poliedrele apar, de asemenea, și în biologie [1]. Ernst Haeckel (1834 – 1919) a descris în 1904 o serie de specii de Radiolaria. La unele dintre ele scheletele sunt modelate ca diverse poliedre regulate.

Diferite forme de poliedre sunt descrise în lucrările [6, 7, 8]. Forma unor figuri spațiale este descrisă în lucrarea fundamentală a lui Anatol T. Fomenco [13]. Pe dreaptă și în plan vom avea numai punctul, segmentul, triunghiul și pătratul, care pot fi considerate simplexe sau cuburi de dimensiuni mici. În spațiile cu dimensiunea n>4 există doar 3 tipuri de poliedre regulate: simplexul n-dimensional, octaedrul n-dimensional (hyperoctaedronul) și cubul n-dimensional (hipercubul). Hiperoctaedronul n-dimensional este reuniunea a două piramide n-dimensionale cu bază comună de forma unui hiperoctaedron cu dimensiunea n-1. Prin urmare, pentru a cuprinde și dimensiuni mari devine necesară examinarea simplexelor și a cuburilor (vezi [3, 6, 14, 15]).

Topologia relațiilor multi-are

Topologia face parte din categoria disciplinelor de bază în matematică. Topologia algebrică oferă metode eficiente de studiere a spațiilor topologice și a structurilor adiacente lor prin intermediul structurilor discrete de tip algebric: grupuri, module, spații vectoriale, grupuri graduate, algebre etc.



Monografia *Topologia algebrică a relațiilor multi-are* este structurată în notații, introducere, patru capitole și bibliografie.

Primul capitol, *Structuri discrete și generalizări,* are mai mult un caracter introductiv și scopul de a familiariza cititorul cu principalele structuri matematice cunoscute, care pot fi privite drept cazuri particulare ale complexului de relații multe-are, studiate în capitolele ce urmează. Analiza cercetărilor efectuate de predecesori ilustrează în mod convingător actualitatea și importanţa problemelor abordate în monografie. Graful se reprezintă ca o pereche $G = (X, \Gamma)$, unde X este o mulțime arbitrară, numită mulțimea vârfurilor grafului, iar $\Gamma = \Gamma_X : X \to X$ este o aplicație multivocă. Mulțimea $U = \{(x, y) : x \in X, y \in \Gamma(x)\}$ este totalitatea muchiilor (sau arcelor) grafului G.

Hipergraf se numește perechea $H=(X,E)$, unde X este o mulțime finită de vârfuri, iar $E=\{E_1,E_2,\ldots,E_n\}$ este o familie de submulțimi nevide a mulțimii X și $X = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. Elementele din familia E se numesc muchii sau, mai corect, hipermuchii.

În paragraful 1.3 se definesc matroizii, introduși în matematică în anii 1930 – 1940 de către S. MacLane și B. L. van der Waerden, și se demonstrează un șir de proprietăți noi ale matroizilor (teoremele 1.3.8 – 1.3.12). Matroidul este format dintr-o pereche (X, E), unde E este o familie de submulțimi a mulțimii X cu proprietățile: $E\neq\varnothing$; dacă $A\in E$ și $B\subset A$, atunci $B\in E$; dacă $A, B\in E$ și $cardA > cardB$, atunci $B \cup \{x\} \in E$, pentru un careva element $x\in A\setminus B$. Fiecărui graf sau hipergraf i se asociază un matroid. Fie φ o funcție pozitivă, definită pe mulțimea X, iar $\varphi(A)$ – suma valorilor $\varphi(x)$, $x \in A \subset X$. Se examinează problema determinării valorii maxime a funcției φ pe familia E. Este importantă teorema 1.3.12 potrivit căreia soluția obținută prin aplicarea algoritmului Greedy nu totdeauna este cea optimală. Se construiește matroidul dual și se formulează principiul dualității. Primul capitol se încheie cu examinarea familiei tuturor lanțurilor r-dimensionale ale unui complex simplicial.

Cel de-al doilea capitol, *Relații multi-are și grupuri de omologii abstracte,* poate fi considerat drept nucleul lucrării. De rând cu introducerea și cercetarea noțiunilor de bază, la nivel teoretic se fundamentează și se argumentează direcția de cercetare și metodele de soluționare a problemelor practice. O relație n-ară pe mulțimea X poate fi reprezentată ca o submulțime a produsului cartezian X^n a n exemplare a mulțimii X. Fie M o mulțime nevidă și $n \geq 1$. Se numește complex generalizat (sau G-complex) de relații multi-are, o familie $\mathbb{R}^{n+1}=\{R^1, R^2, \ldots, R^{n+1}\}$ cu proprietățile: $R^1=X$ este o submulțime finită și nevidă din M; $R^{n+1}\neq\varnothing$; dacă $1<m\leq n+1$, $1\leq i\leq m$ și $(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in R^m$, atunci $(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)\in R^{m-1}$. Observăm că R^m este o relație m-ară pe mulțimea X. Mulțimea X poate fi considerată ca suportul G-complexului de relații multi-are $\mathbb{R}^{n+1}$. Pentru G-complexul de relații multi-are $\mathbb{R}^{n+1}$ se definesc o serie de noțiuni: G-subcomplex; schelet; slab conex; conex; componentă conexă; local complet; arbore; număr ciclomatic etc. Se introduc noțiunile de cardinal $\alpha(\mathbb{R}^{n+1})$ a acoperirii minime și cardinal $\beta(\mathbb{R}^{n+1})$ a mulțimii intern stabile maxime. În cazul când complexul de relații multi-are $\mathbb{R}^{n+1}$ este un arbore $\alpha(\mathbb{R}^{n+1})=\beta(\mathbb{R}^{n+1})$ (Teorema 2.2.3), o afirmație similară cu teorema lui Köning pentru un graf bipartit. Este surprinzător faptul că pentru complexul de relații multi-are $\mathbb{R}^{n+1}$ se determină simplexele abstracte. Dacă notăm cu S^m totalitatea simplexelor m-dimensionale determinate de relația $(m+1)$-ară R^{m+1}, atunci G-complexul de relații multi-are $\mathbb{R}^{n+1}$ poate fi privit ca un complex de simplexe $K^n=\{S^0, S^1, \ldots, S^n\}$, care nu este un complex simplicial abstract, deoarece aceleași vârfuri pot determina mai multe simplexe abstracte. Totodată, deoarece complexul de relații multi-are este definit pe produsul cartezian al unei mulțimi de elemente X, cortegiile respective ar putea să conțină repetări ale elementelor din X, care nu mai pot fi considerate simplexe. În acest caz K^n este considerat un complex de cuasisimplexe abstracte. Odată cu acceptarea unor astfel de structuri, în complexul K^n apar așa-numitele bucle de diferite dimensiuni. „Paralelismul" noțiunilor folosite la definirea complexului permite să se introducă și să se cerceteze o serie de chestiuni importante:

- caracteristica lui Euler $\chi(K^n)$ a complexului K^n;
- orientarea complexului și matricea de incidență;
- Δ-incidența și ∇-incidența cu matricele respective;
- lanțuri și cicluri m-dimensionale;
- grupuri ale Δ-omologiilor $\Delta^m(K^n)$ cu dimensiunea m, $0 \leq m \leq n$, și numerele Betti, ca ranguri ale acestor grupuri;
- grupuri ale Δ-omologiilor diluate $\overline{\Delta}^m(K^n)$ cu dimensiunea m, $0 \leq m \leq n$.

Pentru aceste noțiuni se demonstrează un șir de afirmații profunde și surprinzătoare (teoremele 2.2.5 – 2.2.8, 2.6.4 – 2.6.7). În particular, sunt adevărate afirmațiile analoage cu teoremele lui Euler-Poincaré-Kolmogorov și Poincaré-Vebler-Alexander (teoremele 2.6.5 și 2.8.1).

Cel de-al treilea capitol, *Complexe de cuburi abstracte,* prezintă o îmbinare reușită și originală a metodelor elaborate în capitolul precedent și a unor construcții din teoria clasică a omologiilor cubice. Aceasta permite crearea a noi instrumente eficiente prin metode combinatorice cu aplicații atât practice, cât ți teoretice, în dezvoltarea a noi compartimente ale topologiei combinatorice și teoriei grafurilor. Cubul și simplexul de orice dimensiuni finite permit o descriere simplă atât din punct de vedere formal, cât și geometric. Cubul abstract n-dimensional se definește inductiv:

- cubul 0-dimensional I^0 este un punct sau un element;
- fie I^n este un cub n-dimensional cu fețele cubice cu dimensiunile $i < n$ bine determinate și cu vârfurile $V_n=\{v_i: i \leq 2^n\}$. Atunci $V_{n+1}=V_n\times\{0,1\}=\{(v_i,0),$

$(v_i,1), : i \le 2^n\}$ sunt vârfurile cubului $n+1$-dimensional I^{n+1} cu fețele: dacă $F \subset V_n$ sunt vârfurile unei fețe cubice cu dimensiunea $i<n$ a cubului I^n, atunci $F\times\{0\}$ și $F\times\{1\}$ sunt vârfurile a două fețe cu dimensiunea i, iar $F\times\{0, 1\}$ sunt vârfurile unei fețe cu dimensiunea $i+1$, și alte fețe cubul I^{n+1} nu conține.

Acest model al cubului abstract este identic modelului propus în monografie.

Astfel, cubul abstract 1-dimensional are numai două vârfuri. Două vârfuri diferite ale unei fețe 1-dimensionale se numesc adiacente. Dacă v_0 este un vârf al cubului n-dimensional I^n, atunci există exact n vârfuri $v_1, v_2, \ldots, v_n$, adiacente cu v_0 și totalitatea $\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formează reperul cubului I^n. Cubul m-dimensional se notează prin $I^m=\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, iar mulțimea tuturor cuburilor m-dimensionale – prin $\mathfrak{T}^m$. Observăm că reperul cubului abstract este un simplex abstract cu aceeași dimensiune. În dimensiunile 0 și 1 cubul coincide cu simplexul reperului. Dacă o submulțime finită F a mulțimii X este considerată un cub abstract, atunci numărul de puncte al figurii F este 2^m și se consideră cunoscute submulțimile din F, care sunt fețe ale cubului.

Definiția complexului cubic abstract este similară cu cea a complexului simplicial abstract. Se numește *complex cubic abstract* o pereche ordonată de mulțimi $\Im^n=(V, F)$, unde V este o mulțime nevidă finită de elemente, numite vârfurile complexului, iar F – o familie de submulțimi finite ale mulțimii V, numite cuburi abstracte, cu proprietățile: dacă $v\in V$, atunci $\{v\}\in F$; dacă $f\in F$ și g este o față a cubului f, atunci $g\in F$; dacă $f\in F$, atunci f conține 2^k elemente din V pentru un careva $k\ge 0$ și numărul k se numește dimensiunea cubului f. Indicele n reprezintă dimensiunea maximală a cuburilor din complex.

Noțiunile de lanț m-dimensional și □-ciclu m-dimensional al complexului cubic abstract $\Im^n$ permit să construim grupul de □-ommologii $\square^m(\Im^n, Z)$ cu dimensiunea m al complexului cubic $\Im^n$. Cu ajutorul cociclurilor m-dimensionale se construiesc grupurile de coomologii $\Diamond^m(\Im^n, Z)$ cu dimensiunea m a complexului cubic $\Im^n$.

Ca și în cazul unui complex poliedral, cu ajutorul formulei de forma (e) se determină caracteristica Euler-Poincaré $\chi(\Im^n)$ a complexului cubic $\Im^n$. Se definesc varietățile cubice abstracte și se determină relațiile lor cu complexele cubice abstracte. Teoremele 3.3.2, 3.3.3, 3.4.4, 3.4.7, 3.5.2, 3.5.3, 3.5.5 descriu proprietățile fundamentale ale grupurilor de omologii și co-omologii ale complexului cubic $\Im^n$ și ale varietăților cubice abstracte. Dacă a_m și ρ_m sunt indicii grupurilor $\mathfrak{T}^m$ și $\square^m(\Im^n, Z)$ respective, atunci se determină că:

$$\chi(\Im^n)=\sum(-1)^m a_m=\sum(-1)^m \rho_m, \quad 0 \le m \le n.$$

În capitolul patru, *Aplicații ale complexelor de relații multi-are*, sunt examinate diverse aplicații ale rezultatelor din capitolele precedente. Existența buclelor într-un complex abstract a condus la necesitatea introducerii și studierii varietăților sferice degenerate de genul p. Teorema 4.1.4 prezintă o clasificare a acestor varietăți.

O altă problemă cu caracter practic, examinată în acest capitol, este problema medianei care, pentru spații arbitrare, se formulează în modul următor. Fie $d(x,y)$ o distanță definită pe mulțimea nevidă și finită X, iar $p: X \to R^+$ – o funcție cu valori pozitive. Numărul $p(x)$ se numește pondere a elementului $x \in X$. Notăm $f(x)=\sum d(x,y)p(y)$, unde suma se calculează pentru toate elementele $y\in X$. Punctul $x^*\in X$ se numește mediana tripletului (X,d,p), adică a spațiului X, dacă are loc egalitatea: $f(x^*)=min\{f(y): y\in X\}$. Așa puncte există totdeauna, rămâne doar de văzut dacă putem elabora metode eficiente de calcul al acestora. Precum se cunoaște, în cazul unui triplet arbitrar (X,d,p) problema în cauză este dificilă.

Calculul medianei este important prin faptul că multe probleme de optimizare cu caracter economic, și nu numai, se reduc la problema medianei (vezi lucrările [60, 213, 214] în bibliografia din [4]). În paragrafele doi și trei ale capitolului patru se propune un algoritm elegant de rezolvare a problemei medianei pentru complexele arborescente de cuburi abstracte n-dimensionale. În acest scop se construiește metrica Hamming a arborelui, apoi spațiul X se scufundă într-un spațiu normat finit-dimensional și bine determinat. Într-un final, mediana arborelui n-dimensional $A^n(1)$ este determinată de mediana z^* calculată în cubul m-dimensional E^m pentru un graf special G, obținut ca rezultat a două aplicații succesive α și β. După cum se demonstrează în cele din urmă, dacă z^* este mediana acelui graf G în cubul E^m, atunci mediana x^* a arborelui $A^n(1)$ se determină prin relația: $x^*=\alpha^{-1}\beta^{-1}(z^*)$. Algoritmul propus pentru soluționarea problemei menționate este eficient, nu depinde de metrica spațiului inițial și poate fi aplicat în cazul unor complexe mai generale (de exemplu, complexe de poliedre abstracte).

Un alt aspect al posibilelor aplicații ale teoriei complexelor de relații multi-are se referă la teoria jocurilor – domeniu important al matematicii aplicate. În ultimul paragraf al capitolului, pe un complex de relații multi-are se definește un joc de tipul Nim, și cu ajutorul funcției Grundy (mai precis de tip Grundy) se construiește o strategie eficientă a acestui joc.

Bibliografia conține o listă impunătoare de surse științifice publicate în diverse limbi și care adecvat descriu situația în domeniul de cercetare la momentul actual.

CONCLUZII ȘI PROBLEME

Cele expuse ne permit să evaluăm în mod deosebit *valoarea generală*, *actualitatea* și *originalitatea* cercetării efectuate. Conchidem că monografia lui Sergiu Cataranciuc *Topologia algebrică a relațiilor multi-are* este o lucrare științifică fundamentală din punct de vedere teoretic și aplicativ, reprezintă autorul ei ca pe un savant capabil să rezolve probleme științifice și să dezvolte teorii profunde cu aplicații valoroase. Rezultatele prezentate în carte sunt relevante, generalizează demersul de cercetare, reliefează adecvat momentele și obiectivele cercetării, demonstrează integritatea și încheierea logică a lucrării, reprezintă o totalitate de metode și investigații profunde ce țin de Topologia Algebrică, având drept scop principal evidenţierea importanţei și eficacităţii metodelor de cercetare, bazate pe proprietățile complexelor de relații multi-are.

Monografia cuprinde un șir de exemple, care: a) ilustrează conținutul logic al conceptelor fundamentale expuse în lucrare, sau b) argumentează necesitatea unor restricții din formulările teoremelor, sau c) conțin un răspuns negativ la o careva întrebare concretă. Textul monografiei este însoțit de diverse comentarii istorice care reflectă relațiile dintre conceptele introduse în monografie cu noțiunile și rezultatele predecesorilor.

Rezultatele principale din monografie au menirea de a grupa cercetările în domeniu ale autorului din ultimii ani, reflectate deja în numeroase lucrări publicate în prestigioase reviste științifice și comunicate la diverse foruri științifice naționale și internaționale. O mare parte din ele s-au bucurat de aprecierea comunității științifice. În anul 2004, Sergiu Cataranciuc a fost unul din membrii echipei de cercetători, condusă de academicianul Petru Soltan, care a fost distinsă cu Premiul Național în domeniul Științei și Tehnicii.

Monografia constituie un început bun pentru dezvoltarea ulterioară a teoriei relațiilor multi-are. Cercetările în domeniu ar putea fi continuate pe un spectru de probleme importante atât sub aspect teoretic, cât și din punct de vedere practic. În particular, considerăm că în contextul celor examinate în monografia *Topologia algebrică a relațiilor multi-are*, merită atenție studierea unor probleme legate de morfisme, retracții, omotopii etc. În viziunea autorilor prezentului articol, printre aceste probleme pot fi menționate:

1. De dezvoltat noțiunea de morfism și omotopie pentru categoria de complexe de relații multi-are. De studiat functorii de la această categorie la categoria șirului de omologii și în categoria șirului de coomologii.

2. De determinat condițiile în care grupurile de omologii ale complexului de relații multi-are sunt exacte (se realizează diverse axiome și principii ale teoriei omologiilor).

3. De introdus noțiunea de „triangulare" a complexului de cuburi abstracte. De determinat condițiile de isomorfism ale grupurilor de omologii ale complexului de cuburi abstracte cu grupurile de omologii ale complexului de simplexe abstracte.

4. De examinat cazul complexului de relații multi-are infinite.

Menţionăm că problemele 1, 2 şi 4, formulate pentru complexe de relații multi-are, merită atenție și în cazul complexelor de cuburi abstracte.

Monografia *Topologia algebrică a relațiilor multi-are* este binevenită și multașteptată. Rezultatele ei pot fi utilizate în cercetări științifice, la rezolvarea diverselor probleme practice și la elaborarea cursurilor opționale pentru studenți, masteranzi și doctoranzi.

BIBLIOGRAFIE

1. Bentley R. Molecular asymmetry in biology. V.1/2, New York, Academic. Press, 1969/1970.
2. Betti E. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Ann. Mat. Pura Appl. 2/4, 1871, 140-158.
3. Brisson D. W. Visual Comprehension in n-Dimensions. In: D.W. Brisson (editor), Hypergraphics: Visualizing Complex Relationships in Art, Science and Technology, AAAS Selected Symposium 24, Washington, D.C.: AAAS, 1978, 109-145.
4. Cataranciuc S. Topologia algebrică a relațiilor multiare. Chișinău: CEP USM, 2015.
5. Cartan H. P. and Eilenberg S. Homological Algebra. Princeton University Press, Princeton, 1956.
6. Coxeter H.S.M. Regular Polytopes, New York, Dover Publications, 1973.
7. Coxeter H.S.M. The Beauty of Geometry: Twelve Essays, Dover Publications, 1999.
8. Cromwell P. R. Polyhedra. New York: Cambridge University Press, 1997.
9. Dowker C. H. Homology groups of relations, Ann. of Math. 56: 1, 1952, 84-95.
10. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P., Modern Geometry – Methods and Application. Springer: Part 1 – 1992, Part 2 – 1992, Part 3 – 1993.
11. Eilenberg S. and Steenrod N. Foundations of algebraic topology. Princeton Univ. Press, Princeton, 1952 (În rusă: Н. Стинрод, С. Эйленберг. Основания алгебраической топологии. М.: ГИФМЛ, 1958).
12. Hocking J. G., Young G. S. Topology. Addison-Weiley Publ. Co., 1961. 365 p.
13. Fomenco A.T. Visual and hidden symmetry in geometrty. Computers Math. Applic. 17, no. 1-3, 1989, 301-320.

14. Goodman J. E. and O'Rourke J. (editors). Handbook of discrete and computational geometry. Chapman & Hall, 2004.

15. Grünbaum B. Polyhedra with hollow faces. Proc of NATO-ASI Conference on Polytopes (Toronto 1993), T. Bisztriczky et al. (Editors), Kluwer Academic, 1994, 43-70.

16. King R.B. (editor), Chemical applications of topology and graph theory, Elsevier, 1983.

17. Kuratowski K., Mostowski A. Set theory, Amsterdam - Warszava, Horth-Holland Publ. Comp. and Polish Publ. Comp., 1967 (În rusă: Куратовский, К., Мостовский А., *Теория множеств*, Москва, Мир, 1970).

18. McMullen P. and Schulte S. Abstract Regular Polytopes. Cambridge University Press, 2002.

19. Miron R., Pop I. Topologie Algebrică: Omologie. Omotopie. Spații de acoperire. București, 1974.

20. Miron R., Pitiș Gh., Pop I., On the abstract Čech cohomology, Bul. Acad. Științe Repub. Mold., Matem. 2, 2011, 41-59.

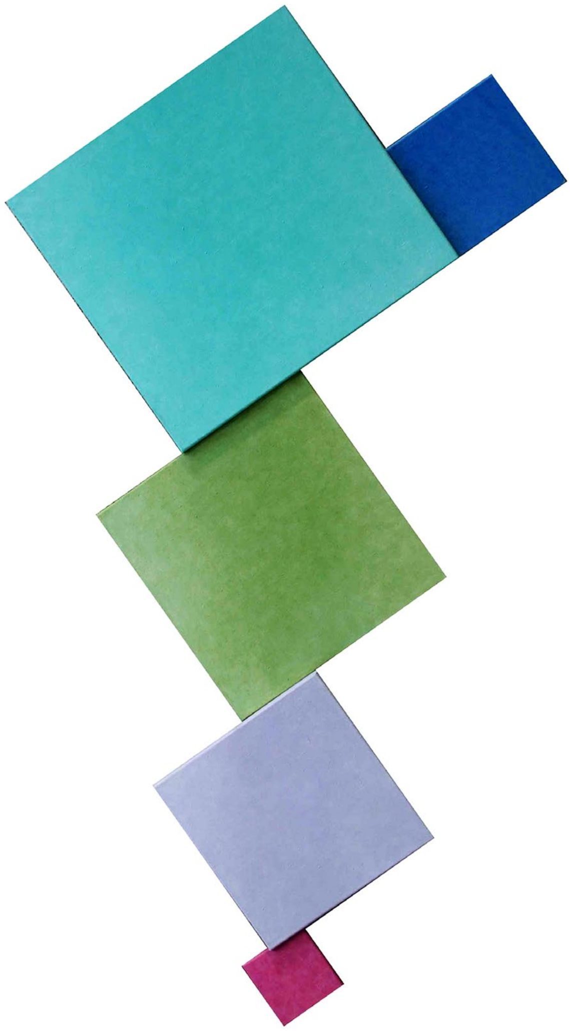
21. Poincaré Henri. Analysis situs. J. Ecole polytech. (2) 1, 1895, 1-121.

22. Pontryagin L.S. Foundations of Combinatorial Topology. Graylock Press, Rochester, N.Y., 1952.

23. Russell B. The Principles of Mathematics. Vol.I. Cambridge: University Press, 1903.

24. Tegmark M. The Mathematical Universe, Foundations of Physics 38 (2), 2008, 101-150 (arXiv:0704.0646. Bibcode:2008FoPh...38..101T. doi:10.1007/s10701-007-9186-9).

25. Weibel A. History of Homological Algebra, Chapter 28 in the book: I.M. James (editor), History of Topology, Elsevier, 1999.



Mihai Țăruș. *Coforma II*, 2010, ulei pe pânză, 5 piese, 210 × 108 × 4 cm